

Эконометрика — Исслед. поток ФЭН, 2020 final

Исслед. поток ФЭН

Эконометрика

2020

final

ЗАДАЧА 1

Известно, что A — постоянная симметричная матрица, r — вектор и

$$f(r) = \frac{r^T A r}{r^T r}.$$

(a) Найдите df .

(б) Перепишите условие

$$df = 0$$

в виде

$$Ar = \text{const} \cdot r.$$

Докажите, что в любом экстремуме функции f вектор r является собственным вектором матрицы A .

ЗАДАЧА 2

Рассмотрим модель

$$y = X\beta + u$$

с неслучайными регрессорами X , причём

$$E(u) = 0, \quad \text{Var}(u) = \sigma^2 I.$$

(a) Найдите

$$\text{Var}(\hat{y}), \quad \text{Var}(y - \hat{y}), \quad E(y - \hat{y}).$$

Укажите размеры каждой найденной матрицы.

Имеется дополнительная тестовая выборка y^{new}, X^{new} , для которой

$$y^{new} = X^{new} \beta + u^{new},$$

$$E(u^{new}) = 0, \quad \text{Var}(u^{new}) = \sigma^2 I.$$

В тестовой выборке n^{new} наблюдений.

Ошибки двух выборок некоррелированы:

$$\text{Cov}(u, u^{new}) = 0.$$

Для тестовой выборки используется старая оценка $\hat{\beta}$, то есть

$$\hat{y}^{new} = X^{new} \hat{\beta}.$$

(б) Найдите

$$\text{Var}(\hat{y}^{new}), \quad \text{Var}(y^{new} - \hat{y}^{new}), \quad E(y^{new} - \hat{y}^{new}).$$

Укажите размеры каждой найденной матрицы.

ЗАДАЧА 3

В выборке всего 5 наблюдений.

Исследователь Бонапарт оценивает парную регрессию

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i.$$

Однако истинная модель имеет вид

$$y_i = 1 + 2z_i + u_i.$$

Известно, что

$$u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I), \quad x^T = (1, 2, 3, 4, 5).$$

(а) Найдите

$$E(\hat{\beta}), \quad \text{Var}(\hat{\beta}), \quad E(RSS),$$

если

$$z^T = (2, 3, 4, 5, 6).$$

(б) Найдите

$$E(\hat{\beta}), \quad \text{Var}(\hat{\beta}), \quad E(RSS),$$

если

$$z^T = (5, 4, 3, 2, 1).$$

ЗАДАЧА 4

Грета Тунберг, Илон Маск и Джеки Чан выбрали ортогональный базис в пятимерном пространстве:

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.$$

Вектор v_1 — вектор из единиц.

Грета Тунберг построила регрессию y на

$$v_1, v_2, v_3.$$

Илон Маск построил регрессию того же вектора y на

$$v_1, v_4, v_5.$$

Джеки Чан построил регрессию того же вектора y на все элементы базиса.

- (а) Изобразите в пятимерном пространстве остатки и прогнозы всех трёх регрессий.
- (б) Как связаны между собой RSS , ESS и TSS всех трёх регрессий?
- (в) Как связаны между собой оценки коэффициентов всех трёх регрессий?

ЗАДАЧА 5

Рассмотрим модель

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$$

с неслучайным регрессором.

(а) Максимально аккуратно сформулируйте теорему Гаусса—Маркова с конструкциями «если» и «то».

Дайте формальное пояснение каждому использованному статистическому термину.

Дополнительно известно, что

$$\beta_2 = 0.$$

(б) Найдите

$$E(R^2).$$

(в) Найдите

$$E(R_{\text{adj}}^2).$$