

# Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2018 final

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2018

final

---

### ЗАДАЧА 1

## 20 баллов

Какие из следующих утверждений верны? В каждом пункте начните ответ со слов «Верно» или «Неверно». Приведите доказательство или контрпример.

1. Если функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

поточечно сходится на  $[0, 1]$  к  $a(x)$  и  $a_n(x) \geq 0$  при всех  $x$  и  $n$ , то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n(x)}$$

поточечно сходится на  $[0, 1]$  к  $\sqrt{a(x)}$ .

2. Если пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + o(x^5)}{g(x)}$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

существуют, то они равны.

3. Произведение двух различных иррациональных чисел является иррациональным числом.

4. Для любой интегрируемой на  $[-2, 2]$  нечётной функции  $f$  определённый интеграл

$$\int_{-2}^2 f(x) dx$$

равен нулю.

5. Если каждая точка множества  $A$  является предельной точкой множества  $A$ , то множество  $A$  замкнуто.

### ЗАДАЧА 2

#### 4 балла

Дана функция

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 8.$$

Найдите точки локальных и глобальных экстремумов функции

$$g(x) = \int_{-3}^x f(t) dt,$$

определённой на множестве  $x \geq -3$ .

### ЗАДАЧА 3

#### 5 баллов

Пусть функция  $f$  дифференцируема на  $\mathbb{R}$ , причём

$$m \leq f'(x) \leq M$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Пусть  $f(x_0) = 1$ .

Предложите и докажите верхнюю и нижнюю оценки для  $f(2x_0)$ .

#### ЗАДАЧА 4

### 12 баллов

Последовательности  $p_n$  и  $q_n$  определены формулами

$$p_1 = a, \quad p_{n+1} = \sqrt{p_n q_n},$$
$$q_1 = b, \quad q_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2},$$

где  $a, b \geq 0$ .

1. Докажите, что для любых неотрицательных  $x$  и  $y$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

2. Докажите, что последовательность  $p_n$  сходится.
3. Докажите, что последовательность  $q_n$  сходится.
4. Докажите, что пределы последовательностей  $p_n$  и  $q_n$  равны.

**ЗАДАЧА 5****15 баллов**

Вычислите пределы.

**1.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}.$$

**2.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x \cdots \sin 2048x}{\ln(1 + x) \cdot \ln(1 + 2x) \cdot \ln(1 + 4x) \cdots \ln(1 + 2048x)}.$$

**3.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1}.$$

**ЗАДАЧА 6****20 баллов**

Найдите интегралы.

1.

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

2.

$$\int \arcsin(2x) dx.$$

3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) \cos(4x) dx.$$

4.

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx.$$

5.

$$\int \frac{2 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x - 2} dx.$$

### ЗАДАЧА 7

## 12 баллов

Исследуйте ряды на сходимость.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где  $a_n$  — арифметическая прогрессия.

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 16n + 12}.$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### ЗАДАЧА 8

## 12 баллов

Дана функция

$$f(x) = e^{2x-x^2+1}.$$

Постройте эскиз её графика. Укажите:

- область определения;
- точки разрыва;
- интервалы возрастания и убывания;
- локальные и глобальные экстремумы и точки экстремума;
- вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты;
- промежутки выпуклости и вогнутости;
- точки перегиба.