

Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2019 final

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2019

final

ЗАДАЧА 1

12 баллов

Рассмотрим функцию f , определённую на отрезке $[-5, -3]$ и заданную формулой

$$f(x) = x^4.$$

Пусть g — функция, обратная к f .

1. Задайте функцию g формулой. Укажите её область определения и область значений.
2. Постройте график g .
3. Найдите уравнение касательной к графику g в точке $x = -4$ и постройте эту касательную на графике.

ЗАДАЧА 2

15 баллов

Рассмотрите функцию

$$f(x) = xe^{-2x^2}.$$

Найдите её область определения, экстремумы и значения в них, промежутки монотонности, вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты, точки разрыва и их типы, а также односторонние пределы около точек разрыва.

Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба. На основе полученной информации постройте график функции и отметьте на нём точки экстремума, точки перегиба и асимптоты.

ЗАДАЧА 3

20 баллов

Рассмотрите функцию

$$f(x) = x^5 \ln(3x).$$

Найдите односторонний предел функции при $x \rightarrow 0$. Доопределите функцию в этой точке по непрерывности: рассмотрите функцию \tilde{f} , совпадающую с f во всех точках, кроме $x = 0$, и принимающую в $x = 0$ значение, при котором \tilde{f} односторонне непрерывна.

Имеет ли \tilde{f} одностороннюю производную в точке $x = 0$? Если да, найдите её. Найдите односторонний предел производной \tilde{f} при $x \rightarrow 0+$. Проведите полное исследование \tilde{f} , как в задаче 2, и постройте её график.

ЗАДАЧА 4

40 баллов

Найдите интегралы.

(a)

$$\int_{-2}^4 (4x + 8)^8 dx.$$

(b)

$$\int_0^3 x^5 \ln(3x) dx.$$

(c)

$$\int_0^{\pi/2} -\cos x \cos(\sin x) dx.$$

(d)

$$\int_7^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^2}.$$

ЗАДАЧА 5**10 баллов**

Сходится ли ряд? Обоснуйте ответ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{7/5} + n}.$$

ЗАДАЧА 6**15 баллов**

Рассмотрите функцию

$$f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{7x}\right) - \sqrt[3]{7x}.$$

Дифференцируема ли она в точке $x = 0$? Если да, найдите её производную в этой точке.

ЗАДАЧА 7**20 баллов**

Пусть функция f дифференцируема в точке $x = 4$ и $f(4) = 1$. Пусть также функция

$$g(x) = |f(x) - 1|$$

дифференцируема в точке $x = 4$.

Найдите $f'(4)$ и $g'(4)$.

ЗАДАЧА 8**15 баллов**

Функция f восемь раз дифференцируема в точке $x = x_0$, причём

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = f^{(3)}(x_0) = f^{(4)}(x_0) = 0,$$

$$f^{(5)}(x_0) = f^{(6)}(x_0) = f^{(7)}(x_0) = 0, \quad f^{(8)}(x_0) = 1.$$

Может ли точка x_0 быть точкой максимума функции f ? Точкой минимума? Может ли она не быть ни точкой максимума, ни точкой минимума? Обоснуйте ответ.