

Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2019 midterm

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2019

midterm

ЗАДАЧА 1

10 баллов

Верно ли утверждение? Если да, докажите его. Если нет, запишите отрицание таким образом, чтобы знак отрицания не стоял перед квантором, и докажите отрицание.

Все переменные принадлежат \mathbb{R} .

1. $\exists v \forall q : qv + 3 > q$.
2. $\exists v \forall q : qv + 3 < q$.

ЗАДАЧА 2

10 баллов

Угадайте предел последовательности и докажите, что он действительно такой, пользуясь определением предела. Если предел равен бесконечности — плюс бесконечности или минус бесконечности, — докажите это. Никакими утверждениями о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{49 + \frac{1}{-9n + 8}}.$$

ЗАДАЧА 3

10 баллов

Угадайте предел функции и докажите, что он действительно такой, пользуясь определением предела функции по Коши, с эпсилонами и дельтами. Если предел равен бесконечности — плюс бесконечности или минус бесконечности, — докажите это. Никакими утверждениями о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя.

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x - 4}{x + 6}.$$

ЗАДАЧА 4

20 баллов

Для каждой функции:

- найдите естественную область определения, то есть множество всех x , при которых выражение определено;
- определите, является ли функция ограниченной;
- найдите все точки разрыва и установите их тип: скачок, устранимый разрыв, полюс или существенный разрыв;
- установите, существуют ли точки, в которых функцию можно доопределить или переопределить так, чтобы она стала непрерывной;
- найдите все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Можно пользоваться всеми фактами, доказанными на лекциях или включёнными в семинарские листочки в качестве задач.

(a) (10 баллов)

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{(x+9)(x+3)^2}\right).$$

(b) (10 баллов)

$$f(x) = \frac{-9x^9 + 5^{-x}}{x^8 + 4 \cdot 6^{-x}}.$$

ЗАДАЧА 5

15 баллов

Пусть функции f и g определены и непрерывны на отрезке $[-1, 8]$. Верно ли, что функция

$$h(x) = \min(f(x), g(x))$$

также непрерывна на отрезке $[-1, 8]$? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

ЗАДАЧА 6

20 баллов

В этой задаче можно пользоваться всеми утверждениями, доказанными на лекциях или включёнными в семинарские листочки в виде задач.

Пусть функция f определена на \mathbb{R} и всюду строго монотонно возрастает: для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.

Рассмотрим два утверждения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{(-1)^n}{3n+6} - 4\right) = -2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

(a) (5 баллов) Верно ли, что из (2) следует (1)? Докажите.

(b) (15 баллов) Верно ли, что из (1) следует (2)? Докажите.