

Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2020 final

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2020

final

ЗАДАЧА 1

10 баллов

Пользуясь только определением предела по Коши и алгебраическими преобразованиями, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow -3} (3x^2 + 4x).$$

ЗАДАЧА 2

5 баллов

Найдите значение выражения

$$(i - 1)^{2020}.$$

Представьте ответ в виде $x + iy$, где x и y — вещественные числа, а i — мнимая единица. В выражениях для x и y можно использовать обычные арифметические операции, включая возведение в целочисленную степень.

ЗАДАЧА 3

10 баллов

Найдите все первые частные производные функции

$$f(x, y) = xe^{2 \cos(xy) - 5}.$$

ЗАДАЧА 4

15 баллов

Пользуясь любыми утверждениями, доказанными на лекциях или сформулированными в семинарских листочках, в том числе в виде задач, найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{2/x} - x^2 - 2x).$$

ЗАДАЧА 5

15 баллов

Рассмотрите функцию

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2 - 1}.$$

Найдите её естественную область определения, промежутки непрерывности, точки разрыва, асимптоты всех типов, промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и корни.

Постройте график функции. Отметьте на нём точки экстремума с их x - и y -координатами, корни и асимптоты.

ЗАДАЧА 6

22 балла

Рассмотрите функцию

$$f(x) = \left(\int_{-1}^{x-1} e^{-t^2-2t} dt \right) - x.$$

Найдите её естественную область определения, промежутки непрерывности, точки разрыва, асимптоты всех типов — для наклонных асимптот достаточно найти угловой коэффициент, — промежутки возрастания и убывания, x -координаты точек экстремума и хотя бы один корень.

Постройте график функции. Отметьте на нём точки экстремума с их x -координатами; y -координаты можно не находить. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба и отметьте их на графике.

Докажите, что функция имеет ровно три различных корня.

ЗАДАЧА 7

30 баллов

Найдите интегралы. Если интеграл несобственный, исследуйте его сходимость: если он расходится, докажите это; если сходится, найдите его значение.

(a) (15 баллов)

$$\int_0^4 \max(x^2, 4x - 3) dx.$$

(b) (15 баллов)

$$\int_0^2 \ln^2 |2t - 2| dt.$$

ЗАДАЧА 8**20 баллов**

Рассмотрите последовательность

$$b_n = (n + 7)^\alpha - n^\alpha, \quad \alpha \geq 0,$$

где α — вещественный параметр.

(a) (15 баллов) Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

в зависимости от α .

(b) (5 баллов) Найдите все значения α , при которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

ЗАДАЧА 9**20 баллов**

Известно, что функция f всюду дифференцируема и

$$f(x) = O(x^4)$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Верны ли следующие утверждения? Обоснуйте ответы.

(a) (10 баллов)

$$f'(x) = O(x^3).$$

(b) (10 баллов)

$$\int_0^x f(t) dt = O(x^5).$$