

Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2020 midterm

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2020

midterm

ЗАДАЧА 1

10 баллов

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную следующим образом:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = -3,$$

$$a_{n+1} = 10a_{n-1} - 3a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Докажите по индукции, что для любого натурального n

$$a_n = (-5)^n + 2^n.$$

ЗАДАЧА 2

15 баллов

Пусть функция f определена на всей числовой оси и справедливо утверждение, где A и C — вещественные числа:

$$\forall C \neq 0 \exists A \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} : x^8 > A^4 \Rightarrow (f(x))^4 < C^8.$$

Найдите

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

если этот предел существует, и докажите, что он такой. Если предел равен бесконечности, докажите это.

Пользоваться можно только определением предела по Коши или по Гейне и алгебраическими преобразованиями. Никакими теоремами о пределах пользоваться нельзя. Можно использовать тот факт, что корень произвольной натуральной степени определён для всех положительных чисел и монотонно возрастает.

ЗАДАЧА 3

25 баллов

Угадайте предел и докажите, что он действительно такой, пользуясь только определением предела и алгебраическими преобразованиями. Никакими теоремами о свойствах пределов, непрерывностью функций и логарифмами пользоваться нельзя. Можно пользоваться неравенством Бернулли.

Явно найдите значение δ или N из определения предела, соответствующее $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Ответ можно оставить в виде числового выражения, содержащего арифметические операции, минимум, максимум и подобные функции.

(a) (10 баллов)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4x - 4}.$$

(b) (15 баллов)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 2}{4n} \left(\frac{1}{3}\right)^{1/n}.$$

ЗАДАЧА 4

20 баллов

Для каждой функции:

- найдите естественную область определения;
- найдите все точки разрыва и установите их тип: скачок, устранимый разрыв или разрыв второго рода;
- установите, существуют ли точки, в которых функцию можно доопределить или переопределить так, чтобы она стала непрерывной;
- найдите все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Можно пользоваться всеми фактами, доказанными на лекциях или включёнными в семинарские листочки в качестве задач.

(a) (10 баллов)

$$f(x) = \frac{\sin(4x)}{x^2 - 3x}.$$

(b) (10 баллов)

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{|x|}(-3x + 3)\right) + 2x.$$

ЗАДАЧА 5

20 баллов

Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке

$$I = [0, 2].$$

Рассмотрим образ отрезка I под действием f :

$$f(I) := \{f(x) \mid x \in I\}.$$

Докажите, что существует точка $c \in I$, для которой $f(c) = c$, если:

(a) (10 баллов)

$$f(I) \subseteq I.$$

(b) (10 баллов)

$$f(I) \supseteq I.$$

ЗАДАЧА 6

20 баллов

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 = -1$ и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1.$$

Пусть функция g определена в некоторой окрестности точки -1 и не является непрерывной в этой точке, хотя имеет в ней предел. Также известно, что

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow -1} g(y).$$

Докажите или опровергните утверждение: обязательно найдётся проколотая окрестность \mathring{U} точки -1 , такая что для всех $x \in \mathring{U}$

$$f(x) \neq -1.$$