

Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2021 final

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2021

final

ЗАДАЧА 1

по 7 баллов за пункт

Сходится ли ряд? Если да, найдите его сумму; если нет, докажите, что он расходится.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 13n + 40}.$$

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3} \ln(5n)}.$$

ЗАДАЧА 2

по 7 баллов за пункт

Найдите неопределённый или определённый интеграл. Если определённый интеграл несобственный, укажите это и исследуйте его сходимость. Если он расходится, докажите это; если сходится, найдите его значение. При вычислении неопределённого интеграла не забывайте константу.

(a)

$$\int \ln \left(\frac{x-4}{x-6} \right) dx.$$

(b)

$$\int_1^9 \ln \left| \frac{x-4}{x-6} \right| dx.$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|2x-7|} dx.$$

ЗАДАЧА 3

5 баллов

Найдите все вещественные и комплексные корни уравнения

$$z^3 - 6z^2 + 34z = 0.$$

ЗАДАЧА 4

10 баллов

Найдите частные производные по всем переменным функции

$$F(x, y) = \int_{4x}^{2y} \cos(\sin(e^{3t})) dt.$$

ЗАДАЧА 5

20 баллов

Рассмотрите функцию

$$f(x) = \ln \left(4 \ln \left(\ln \left(4x^3 - 4\alpha x + e \right) \right) \right).$$

Для всех значений вещественного параметра α найдите; параметр α может входить в ответы:

1. область определения функции;
2. множество точек, на которых функция непрерывна, с доказательством;
3. точки локального максимума или минимума, если они существуют; достаточно найти соответствующие значения x ;
4. промежутки возрастания и убывания;
5. вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

ЗАДАЧА 6

15 баллов

Пусть функция f имеет $(n + 1)$ непрерывную производную в некоторой окрестности точки x_0 . Докажите, что

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O((x - x_0)^{n+1})$$

при $x \rightarrow x_0$.

Можно пользоваться всеми утверждениями, доказанными на лекциях и включёнными в семинарские листочки в виде задач.

ЗАДАЧА 7

20 баллов

Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке $[3, +\infty)$, неотрицательна и невозрастает всюду, где определена, а также выпукла вниз.

Докажите или опровергните утверждение: интеграл

$$\int_3^{+\infty} f(x) dx$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_3^{+\infty} (f([x])([x] + 1 - x) + f([x] + 1)(x - [x])) dx,$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x .

ЗАДАЧА 8

15 баллов

Известно, что $f(0) = 0$, функция f дифференцируема в нуле и

$$f'(0) = 4.$$

Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ найдите

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n f\left(\frac{x}{3^n}\right).$$