

# Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2021 midterm

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2021

midterm

## ЗАДАЧА 1

### 10 баллов

Верно ли утверждение? Если да, докажите. Если нет, постройте отрицание и докажите его.

(a) (5 баллов)

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists c \in \mathbb{R} : c + x^2 - 3x < 0.$$

(b) (5 баллов)

$$\forall c \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : c + x^2 - 3x < 0.$$

## ЗАДАЧА 2

### 20 баллов

Найдите предел, пользуясь определением предела последовательности или определением предела функции по Коши или по Гейне. Если предел не существует, докажите это. Если предел равен бесконечности, плюс бесконечности или минус бесконечности, докажите это. Если предел равен бесконечности, но не равен плюс или минус бесконечности, доказывать последнее не требуется.

Никакими фактами о пределах, кроме определений, пользоваться нельзя. Логарифмами пользоваться нельзя. При необходимости можно использовать неравенство Бернулли.

(a) (10 баллов)

$$\lim_{x \rightarrow -4} |-2x - 8|.$$

(b) (10 баллов)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 6}{3n - 5}.$$

**ЗАДАЧА 3****20 баллов**

Пусть все члены последовательности  $\{a_n\}$  положительны и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = 7.$$

Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

если он существует. Если он не существует и при этом равен бесконечности, докажите это. Если предел не существует и не равен бесконечности, также докажите это. Если возможны разные варианты ответа, приведите примеры для каждого и докажите, что других вариантов нет.

Никакими фактами о пределах пользоваться нельзя, только определением. Логарифмами пользоваться нельзя. При необходимости можно использовать неравенство Бернулли.

**ЗАДАЧА 4****15 баллов**

Функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $-3$ , и известно, что

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 6.$$

Найдите

$$\lim_{x \rightarrow -3} x f(x).$$

Никакими фактами о пределах пользоваться нельзя, только определением.

### ЗАДАЧА 5

## 30 баллов

Исследуйте каждую функцию:

- найдите естественную область определения;
- найдите все точки разрыва и установите их тип: скачок, устранимый разрыв или разрыв второго рода;
- установите, существуют ли точки, в которых функцию можно доопределить или переопределить так, чтобы она стала непрерывной;
- найдите все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты;
- определите, является ли функция ограниченной на своей области определения.

Можно пользоваться всеми фактами, доказанными на лекциях или включёнными в семинарские листочки в качестве задач.

### (a) (15 баллов)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{8x^2 + 4}{x - 5},$$

где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

### (b) (15 баллов)

$$f(x) = \sin \left( \frac{1}{x^2 - 6x + 8} \right).$$

### ЗАДАЧА 6

## 20 баллов

Рассмотрим функцию  $f$ , определённую на интервале  $(-4, 4)$ . Известно, что

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty,$$

а также что она непрерывна на  $(-4, 4)$ .

Обязательно ли она является сюръективной? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример и докажите, что он подходит.

Можно пользоваться всеми фактами, доказанными на лекциях или включёнными в семинарские листочки в виде утверждений или задач.

Напоминание: отображение  $g : X \rightarrow Y$  называется сюръективным, если для всякого  $y \in Y$  найдётся  $x \in X$ , такой что  $g(x) = y$ .