

Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2022 midterm

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2022

midterm

ЗАДАЧА 1

Докажите утверждение, пользуясь только определением предела, для функций — по Коши, преобразованиями утверждений с кванторами и алгебраическими преобразованиями. Никакими фактами о пределах, включая единственность предела, пользоваться нельзя: всё необходимо доказывать явно. Логарифмами пользоваться нельзя. При необходимости можно использовать неравенство Бернулли.

(a)

Докажите, что неверно утверждение

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 35}{7} = -5.$$

(b)

Докажите, что верно утверждение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n-6} = 0.$$

ЗАДАЧА 2

Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{6n}\right)^{5n+8}.$$

Можно пользоваться всеми фактами, сформулированными на лекциях, включёнными в семинарские листочки и домашние задания, а также их прямыми аналогами. В ответе могут использоваться значения элементарных функций: тригонометрических, логарифмов и экспоненты. Если предел равен бесконечности, плюс бесконечности или минус бесконечности, докажите это.

ЗАДАЧА 3

Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{4^x + 5^{-x}}{-7^x + 6^{-x}}\right).$$

Можно пользоваться всеми фактами, сформулированными на лекциях, включёнными в семинарские листочки и домашние задания, а также их прямыми аналогами. В ответе могут использоваться значения элементарных функций: тригонометрических, логарифмов и экспоненты. Если предел равен бесконечности, плюс бесконечности или минус бесконечности, докажите это.

ЗАДАЧА 4

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 9x + 14}{x - a},$$

где a — параметр, принимающий произвольное фиксированное вещественное значение.

Исследуйте функцию в зависимости от значения a :

1. Найдите естественную область определения функции.
2. Найдите все точки разрыва, установите их тип: скачок, устранимый разрыв или разрыв второго рода. Найдите пределы слева и справа или докажите, что они не существуют.
3. Установите, существуют ли точки, в которых функцию можно доопределить или переопределить так, чтобы она стала непрерывной.
4. Найдите все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.
5. Верно ли, что для любого отрезка $[A, B]$ функция ограничена на пересечении этого отрезка с её областью определения?

Ответы могут задаваться формулами, содержащими a , и иным образом зависеть от a . Все утверждения необходимо доказывать. Например, если указаны точки разрыва, нужно доказать, что все остальные точки являются точками непрерывности.

Можно пользоваться всеми фактами, доказанными на лекциях или включёнными в семинарские листочки в качестве задач.

ЗАДАЧА 5

Рассмотрим функцию f , определённую на \mathbb{R} . Известно, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(6 \cos\left(\frac{5\pi}{x}\right)\right) = -4.$$

Найдите $f(3)$, если это можно сделать однозначно, либо докажите, что данных недостаточно.