

Математический анализ 1 — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2025 final

Совбак ВШЭ и РЭШ

Математический анализ 1

2025

final

ЗАДАЧА 1

20 баллов

Какие из перечисленных утверждений являются верными?

В каждом пункте начните ответ со слов «Верно» или «Неверно». Приведите доказательство или контрпример.

1. При $x \rightarrow +\infty$ справедливо соотношение

$$\sqrt{|o(x^2)|} = o(x).$$

2. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$, функция $f(x)$ определена на X , а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на X . Тогда существует константа $c \in \mathbb{R}$ такая, что

$$F_1(x) = F_2(x) + c.$$

3. Если для некоторой определённой на \mathbb{R} функции $f(x)$ и любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\int_{a-1}^a f(x) dx = 1,$$

то $f(x)$ — константа на всей вещественной прямой.

4. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[1, +\infty)$, а

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Тогда $F(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[1, +\infty)$.

5. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$, а B — множество всех предельных точек A . Тогда $A \cup B$ — замкнутое множество.

ЗАДАЧА 2

16 баллов

Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{4^x} - x.$$

Постройте эскиз графика $f(x)$.

Укажите область определения и найдите множество всех значений $f(x)$. Укажите точки разрыва. Укажите интервалы возрастания и убывания $f(x)$. Найдите точки локальных и глобальных экстремумов, а также сами локальные и глобальные экстремумы.

Найдите вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Укажите промежутки, на которых функция $f(x)$ выпукла и вогнута.

ЗАДАЧА 3

12 баллов

Вычислите пределы:

1.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x - x^2 + x^3) - \sin(4x^2) \cos(\pi x)}{x + x^2 - x^3}.$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\cos(\pi x)) + 2 \tan((x - 1)^3)}{\cos(\sin(x - 1)) - 1 + \tan((x - 1)^2)}.$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x + 2) \ln(x + 2) - 2(x + 1) \ln(x + 1) + x \ln x).$$

ЗАДАЧА 4

12 баллов

Найдите неопределённые интегралы и укажите области, на которых они определены:

1.

$$\int \sin(2x) \cos(4x) dx.$$

2.

$$\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

3.

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

ЗАДАЧА 5

4 балла

Найдите несобственный интеграл или докажите, что он расходится:

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^3} dx.$$

ЗАДАЧА 6

4 балла

Найдите интеграл или докажите, что он не существует:

$$\int_0^1 x D(x) dx,$$

где $D(x)$ — функция Дирихле.

ЗАДАЧА 7

8 баллов

Исследуйте ряды на сходимость:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{2n+5}}{\ln n}.$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

ЗАДАЧА 8

10 баллов

Василий Иванович взял в банке кредит в сумме N на бесконечное количество лет.

Каждый год он обязан платить в качестве процентов долю $\delta \in (0, 1)$ от оставшегося тела кредита. Например, за первый год он заплатит в качестве процентов δN .

Василий Иванович решил погашать тело кредита по следующему правилу: каждый год он будет уменьшать тело кредита на долю $\alpha \in (0, 1)$. Например, во второй год его задолженность составит $N - \alpha N$.

1. Определите общую сумму

$$S = S(\alpha, \delta),$$

которую Василий Иванович выплатит банку в качестве процентов за всю жизнь.

2. Предположим, что у Василия Ивановича нет собственных накоплений, ежегодный заработок равен I , потребление равно нулю, а альтернативных способов инвестирования нет.

Определите разницу в переплаченных процентах между выбранной Василием Ивановичем стратегией погашения кредита и оптимальной для него стратегией.

ЗАДАЧА 9**7 баллов**

Вовочка проводит всевозможные касательные к части графика функции

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

лежащей в первой четверти координатной плоскости.

Каждая касательная отсекает от осей координат треугольник. Среди всех таких треугольников найдите треугольник с наименьшей и наибольшей площадью, если они существуют.

Чему равны наименьшая и наибольшая площади?

ЗАДАЧА 10**7 баллов**

Определите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2e^{5nx}}.$$