Линейная алгебра — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2025 demo final

Совбак ВШЭ и РЭШ | Линейная алгебра | 2025 | demo final

ЗАДАЧА 1

Теоретический вопрос — 10 баллов

Список теоретических вопросов приведён после задач.

Функции от матриц. Сформулируйте и докажите теорему Гамильтона–Кэли.

ЗАДАЧА 2

10 баллов

Пусть

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$$

— ортонормированный базис $\mathbb{R}^2$, а линейный оператор f в базисе

$$B' = \{\bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2\}$$

имеет матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу сопряжённого оператора f^* в базисе B'.

ЗАДАЧА 3

10 баллов

Найдите жорданову форму линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$

и базис, в котором матрица оператора f имеет найденную жорданову форму.

ЗАДАЧА 4

10 баллов

Для квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

найдите её канонический вид, а также ортогональное преобразование P, приводящее её к каноническому виду.

ЗАДАЧА 5

10 баллов

Пусть A — положительно определённая матрица, а $k \in \mathbb{R}$ — действительное число.

Докажите, что матрица kA является положительно определённой тогда и только тогда, когда

$$k > 0.$$

ЗАДАЧА 6

10 баллов

Найдите решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y, \end{cases}$$

если

$$x(0) = 3, \qquad y(0) = -2, \qquad z(0) = -3.$$

ЗАДАЧА 7

10 баллов

Определите тип квадрики, напишите её каноническое уравнение и найдите каноническую систему координат, если в исходной системе координат она задана уравнением

$$8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0.$$

Список теоретических вопросов к итоговой контрольной работе

1. **Симметрические линейные операторы.** Докажите, что характеристическое уравнение симметрического линейного оператора имеет только действительные корни.

2. **Симметрические линейные операторы.** Докажите, что у любого симметрического оператора f в евклидовом пространстве V существует ортогональный (ортонормированный) базис из собственных векторов этого оператора.

3. **Корневое подпространство $V(\lambda)$ линейного оператора f векторного пространства V.** Докажите, что $V(\lambda)$ — инвариантное относительно f линейное подпространство V, причём

$$V(\lambda) \neq \{\bar{0}\}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lambda \in \sigma(f).$$

4. **Матрица квадратичной формы.** Формула преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса, с доказательством.

5. **Канонический вид квадратичной формы.** Сформулируйте и докажите закон инерции квадратичной формы.

6. **Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы.** Сформулируйте и докажите критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

7. Докажите, что две квадратичные формы, одна из которых является положительно определённой, можно одновременно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием.

8. **Сопряжённое пространство векторного пространства V.** Аннулятор W^0 векторного подпространства $W \subset V$. Теорема о соотношении их размерностей, с доказательством.

9. **Функции от матриц.** Сформулируйте и докажите теорему Гамильтона–Кэли.

10. **Эллипс.** Выведите каноническое уравнение эллипса.

11. **Гипербола.** Выведите каноническое уравнение гиперболы.

12. **Парабола.** Выведите каноническое уравнение параболы.