

# Линейная алгебра — Совбак ВШЭ и РЭШ, 2025 demo final

Совбак ВШЭ и РЭШ

Линейная алгебра

2025

demo final

## ЗАДАЧА 1

### Теоретический вопрос — 10 баллов

Список теоретических вопросов приведён после задач.

**Функции от матриц.** Сформулируйте и докажите теорему Гамильтона–Кэли.

## ЗАДАЧА 2

### 10 баллов

Пусть

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$$

— ортонормированный базис  $\mathbb{R}^2$ , а линейный оператор  $f$  в базисе

$$B' = \{\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2\}$$

имеет матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу сопряжённого оператора  $f^*$  в базисе  $B'$ .

**ЗАДАЧА 3****10 баллов**

Найдите жорданову форму линейного оператора  $f$ , заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$

и базис, в котором матрица оператора  $f$  имеет найденную жорданову форму.

**ЗАДАЧА 4****10 баллов**

Для квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

найдите её канонический вид, а также ортогональное преобразование  $P$ , приводящее её к каноническому виду.

**ЗАДАЧА 5****10 баллов**

Пусть  $A$  — положительно определённая матрица, а  $k \in \mathbb{R}$  — действительное число.

Докажите, что матрица  $kA$  является положительно определённой тогда и только тогда, когда

$$k > 0.$$

**ЗАДАЧА 6****10 баллов**

Найдите решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y, \end{cases}$$

если

$$x(0) = 3, \quad y(0) = -2, \quad z(0) = -3.$$

## ЗАДАЧА 7

### 10 баллов

Определите тип квадрики, напишите её каноническое уравнение и найдите каноническую систему координат, если в исходной системе координат она задана уравнением

$$8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0.$$

### Список теоретических вопросов к итоговой контрольной работе

- 1. Симметрические линейные операторы.** Докажите, что характеристическое уравнение симметрического линейного оператора имеет только действительные корни.
- 2. Симметрические линейные операторы.** Докажите, что у любого симметрического оператора  $f$  в евклидовом пространстве  $V$  существует ортогональный (ортонормированный) базис из собственных векторов этого оператора.
- 3. Корневое подпространство  $V(\lambda)$  линейного оператора  $f$  векторного пространства  $V$ .** Докажите, что  $V(\lambda)$  — инвариантное относительно  $f$  линейное подпространство  $V$ , причём

$$V(\lambda) \neq \{\bar{0}\}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lambda \in \sigma(f).$$

- 4. Матрица квадратичной формы.** Формула преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса, с доказательством.
- 5. Канонический вид квадратичной формы.** Сформулируйте и докажите закон инерции квадратичной формы.

- 6. Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы.** Сформулируйте и докажите критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.
- 7.** Докажите, что две квадратичные формы, одна из которых является положительно определённой, можно одновременно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием.
- 8. Сопряжённое пространство векторного пространства  $V$ .** Аннулятор  $W^0$  векторного подпространства  $W \subset V$ . Теорема о соотношении их размерностей, с доказательством.
- 9. Функции от матриц.** Сформулируйте и докажите теорему Гамильтона–Кэли.
- 10. Эллипс.** Выведите каноническое уравнение эллипса.
- 11. Гипербола.** Выведите каноническое уравнение гиперболы.
- 12. Парабола.** Выведите каноническое уравнение параболы.