Линейная алгебра — Совбак ВШЭ и РЭШ, demo final

Совбак ВШЭ и РЭШ | Линейная алгебра | demo | demo final

ВАРИАНТ 1

Задача 1

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}_2[t]$ многочленов переменной t степени не выше двух с вещественными коэффициентами и отображение

$$T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t],$$

заданное формулой

$$T(p(t)) = t(t+1)p''(t) + (t-1)p'(t) - p(t).$$

(a) Докажите, что T — линейное отображение.

(b) Найдите базисы и размерности пространств

$$\ker T \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Im} T.$$

(c) Является ли отображение T сюръективным? Ответ обоснуйте.

Задача 2

В пространстве $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ рассмотрим канонический базис

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

и линейное отображение

$$T(A) = AM, \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Найдите матрицу $[T]_{\mathcal{B}}$.

(b) Рассмотрим базис

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Найдите матрицу перехода

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}.$$

(c) Найдите матрицу $[T]_{\mathcal{B}'}$.

(d) Каково соотношение между матрицами

$$[T]_{\mathcal{B}} \qquad \text{и} \qquad [T]_{\mathcal{B}'}?$$

Задача 3

Пусть подпространство $\mathbb{R}^3$ задано как

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \, a + b = c \right\}.$$

(a) Вычислите

$$\mathrm{proj}_W \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Найдите ортонормированный базис (v_1, v_2, v_3) пространства $\mathbb{R}^3$ такой, что (v_1, v_2) является базисом пространства W.

Задача 4

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Докажите, что 4 — собственное значение матрицы A.

(b) Определите все собственные значения матрицы A и соответствующие собственные пространства.

(c) Найдите ортогональную матрицу O и диагональную матрицу D такие, что

$$O^T A O = D.$$

Задача 5

Задаёт ли билинейная форма

$$\langle u, v \rangle = u^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} v$$

скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$?

Ответ обоснуйте.

ВАРИАНТ 2

Задача 1 — 8 баллов

Докажите, что множество

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = p'(-1) = 0\}$$

является векторным пространством.

Задача 2

Пусть

$$T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$$

— отображение, определённое формулой

$$T(p(x)) = p(x) + (x-1)p'(x).$$

(a) (2 балла) Докажите линейность отображения T.

(b) (3 балла) Найдите каноническую матрицу

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$$

этого отображения в базисе

$$\mathcal{C} = (1, x, x^2)$$

пространства $\mathbb{R}_2[x]$.

(c) (2 балла) Докажите, что

$$\mathcal{B} = \big(1, 1-x, (1-x)^2\big)$$

является базисом.

(d) (3 балла) Найдите

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

(e) (5 баллов) Найдите матрицы перехода

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \qquad \text{и} \qquad P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

(f) (8 баллов) Приведите формулу связи между матрицами

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} \qquad \text{и} \qquad [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$$

и проверьте с её помощью вычисления в пунктах (b) и (c).

(g) (2 балла) Выясните, является ли T изоморфизмом. Ответ обоснуйте.

Задача 3

(a) (5 баллов) Пусть

$$T : V \to \mathbb{R}^n$$

— изоморфизм векторных пространств V и $\mathbb{R}^n$.

Докажите, что скобка

$$\langle u, v\rangle_T = T(u) \cdot T(v)$$

задаёт скалярное произведение на V.

Здесь $\cdot$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

(b) (5 баллов) Пусть

$$V = \mathbb{R}_2[t]$$

и отображение

$$T : V \to \mathbb{R}^3$$

действует по правилу

$$at^2 + bt + c \longmapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{pmatrix}.$$

Докажите, что T — изоморфизм.

(c) (15 баллов) Рассмотрим пространство

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_T),$$

где V и T заданы в пункте (b), а $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ определено как в пункте (a).

Пусть

$$W = \operatorname{span}\{1, t\}.$$

Найдите

$$\operatorname{proj}_W t^2$$

относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$.

Задача 4

(a) (10 баллов) Диагонализуйте матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Укажите также обратимую матрицу P и диагональную матрицу D такие, что

$$A = PDP^{-1}.$$

(b) (10 баллов) Найдите A^3.

Задача 5

(a) (12 баллов) Найдите максимум и минимум квадратичной формы

$$Q(x) = 3x_1^2 - 3x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_2x_3$$

при ограничении

$$x^T x = 2.$$

Ответ обоснуйте.

(b) (10 баллов) Найдите все значения параметра α, при которых квадратичная форма

$$Q(x) = \alpha x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

отрицательно определена.

Ответ обоснуйте.

ВАРИАНТ 3

Задача 1 — 10 баллов

Рассмотрим векторное пространство вещественных матриц 2×2,

$$M_{2\times 2}.$$

Какие из следующих подмножеств $M_{2\times 2}$ являются векторными пространствами?

(a)

$$V_1 = \{A \in M_{2\times 2} \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}\,.$$

(b)

$$V_2 = \{A \in M_{2\times 2} \mid \det(A) = 0\}\,.$$

(c)

$$V = \{A \in M_{2\times 2} \mid \operatorname{tr}(A) = 1\}\,.$$

Ответ обоснуйте.

Задача 2

Пусть

$$T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$$

— отображение, определённое формулой

$$T(A) = AB,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) (2 балла) Докажите линейность отображения T.

(b) (3 балла) Найдите каноническую матрицу

$$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$$

этого отображения в базисе

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

пространства $M_{2\times 2}$.

(c) (3 балла) Найдите

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}},$$

где

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(d) (5 баллов) Найдите матрицы перехода

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \qquad \text{и} \qquad P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

(e) (8 баллов) Приведите формулу связи между матрицами

$$[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} \qquad \text{и} \qquad [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$$

и проверьте с её помощью вычисления в пунктах (b) и (c).

(f) (2 балла) Выясните, является ли T изоморфизмом. Ответ обоснуйте.

Задача 3

(a) (5 баллов) Пусть

$$T : V \to W$$

— изоморфизм векторных пространств V и W.

Пусть на W задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$.

Докажите, что скобка

$$\langle u, v \rangle_T = \langle T(u), T(v) \rangle_W$$

задаёт скалярное произведение на V.

(b) (7 баллов) Пусть

$$V = M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad W = \mathbb{R}_3[t],$$

и отображение

$$T : V \to W$$

действует по правилу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a+b)t^3 + (b+c)t^2 + ct + d.$$

Докажите, что T — изоморфизм.

(c) (20 баллов) На пространстве

$$W = \mathbb{R}_3[t]$$

зададим скалярное произведение

$$\langle p, q \rangle_W = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt,$$

где

$$p, q \in \mathbb{R}_3[t].$$

Рассмотрим пространство

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_T),$$

где V и T заданы в пункте (b), а $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ определено как в пункте (a).

Пусть

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Найдите

$$\operatorname{proj}_U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$.

Задача 4

(a) (10 баллов) Диагонализуйте матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Укажите также обратимую матрицу P и диагональную матрицу D такие, что

$$A = PDP^{-1}.$$

(b) (10 баллов) Найдите A^3.

Задача 5

(a) (15 баллов) Приведите квадратичную форму

$$Q(x) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$$

к каноническому виду.

(b) (10 баллов) Найдите все значения параметра α, при которых квадратичная форма

$$Q(x) = 2x_1^2 + \alpha x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

отрицательно определена.

Ответ обоснуйте.